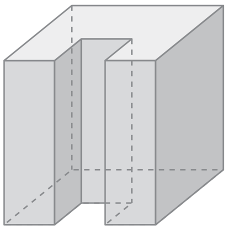
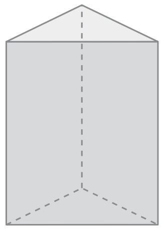
EJERCICIOS PROPUESTOS

10.1 Indica cuál de estos poliedros es cóncavo y cuál es convexo.

a)



b)



a) Cóncavo

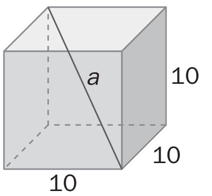
b) Convexo

10.2 Completa la siguiente tabla.

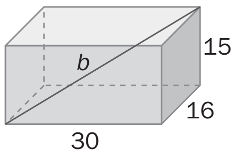
	Caras (C)	Vértices (V)	Aristas (A)	$C + V$	$A + 2$
Tetraedro	4	4	6	8	8
Cubo	6	8	12	14	14
Octaedro	8	6	12	14	14
Dodecaedro	12	20	30	32	32
Icosaedro	20	12	30	32	32

10.3 Halla el elemento desconocido en los siguientes prismas. Las medidas están dadas en centímetros.

a)



b)



a) Hallamos la diagonal de la base: $d = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$ cm

Y ahora la diagonal del prisma, por el teorema de Pitágoras:

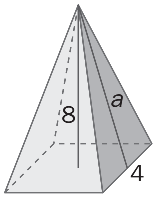
$a = \sqrt{\left(\sqrt{200}\right)^2 + 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ cm

b) Hallamos la diagonal de la base: $d = \sqrt{30^2 + 16^2} = \sqrt{1\,156} = 34$ cm

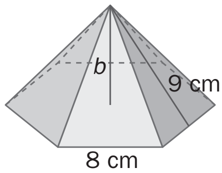
Y ahora la diagonal del prisma, por el teorema de Pitágoras: $b = \sqrt{34^2 + 15^2} = \sqrt{1\,381}$ cm

10.4 Calcula el elemento desconocido en estas pirámides. Las medidas están dadas en centímetros.

a)



b)



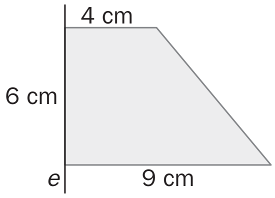
a) La base es un cuadrado, aplicamos el teorema de Pitágoras con catetos: 2 y 8

$a = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 8{,}25$ cm

b) Sea h la apotema del hexágono, por Pitágoras: $h^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{48} = 6{,}93$ cm

$b^2 + 6{,}93^2 = 9^2 \Rightarrow b^2 = 33 \Rightarrow b = 5{,}74$ cm

10.5 ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al girar el trapecio sobre el eje *e*? Halla la generatriz.

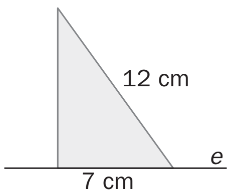


Se obtiene un tronco de cono.

Para el cálculo de la generatriz usamos el teorema de Pitágoras:

$g^2 = 6^2 + 5^2 = 61 \Rightarrow g = 7{,}81$ cm

10.6 ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al girar el triángulo sobre el eje *e*? ¿Cuánto mide el radio de la base?

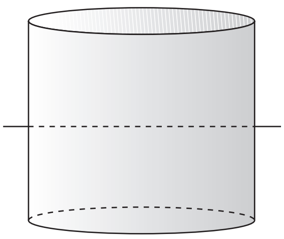


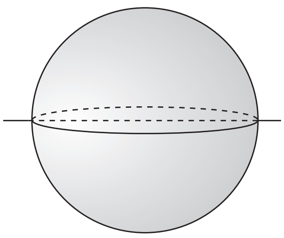
Se obtiene un cono.

El radio de la base es el cateto de longitud desconocida del triángulo, usamos Pitágoras para hallarlo.

$12^2 = 7^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 95 \Rightarrow x = 9{,}75$ cm

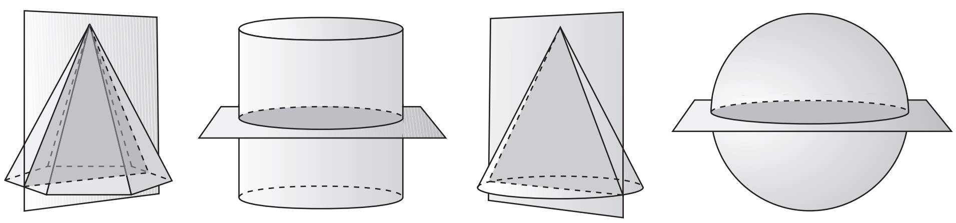
10.7 Para los cuerpos del ejercicio resuelto 3, traza, si es posible, otros ejes de simetría.





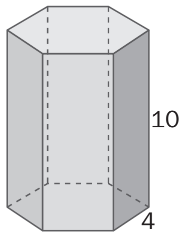
La pirámide y el cono no tienen más ejes de simetría.

10.8 Para los cuerpos del ejercicio resuelto 3, traza, si es posible, otros planos de simetría.

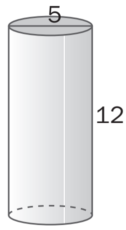


10.9 **Halla el área lateral y total de estos cuerpos. Las medidas están dadas en centímetros.**

a)



b)



a) $A_{\text{hexágono}} = 6\left(\dfrac{4a}{2}\right) = 12a = 12\sqrt{4^2 - 2^2} = 12\sqrt{12} = 41{,}57 \text{ cm}^2$

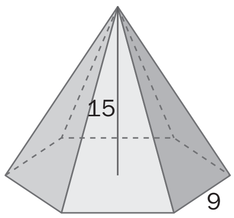
$A_{\text{lateral}} = 10 \cdot 24 = 240 \text{ cm}^2 \quad A_{\text{total}} = 240 + 2 \cdot 41{,}57 = 323{,}14 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{lateral}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 12 = 60\pi = 188{,}4 \text{ cm}^2$

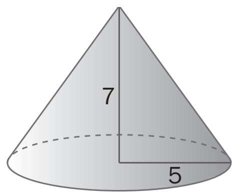
$A_{\text{cilindro}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 60\pi + 2\pi \cdot 2{,}5^2 = 72{,}5\pi = 227{,}77 \text{ cm}^2$

10.10 **Calcula el área lateral y total de los siguientes cuerpos, cuyas medidas están dadas en centímetros.**

a)



b)



a) Se calcula la longitud de arista lateral de la pirámide: $l = \sqrt{15^2 + 9^2} = 17{,}49 \text{ cm}$

Se calcula la longitud de la apotema de la pirámide: $A = \sqrt{17{,}49^2 - 4{,}5^2} = 16{,}9 \text{ cm}$

$A_{\text{lateral}} = \dfrac{p \cdot A}{2} = \dfrac{9 \cdot 6 \cdot 16{,}9}{2} = 456{,}3 \text{ cm}^2$

Se calcula la longitud de la apotema de la base: $a = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2} = 7{,}8 \text{ cm}$

$A_{\text{pirámide}} = \dfrac{p \cdot A}{2} + \dfrac{p \cdot a}{2} = 456{,}3 + \dfrac{9 \cdot 6 \cdot 7{,}8}{2} = 666{,}9 \text{ cm}^2$

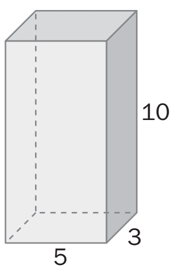
b) Se calcula la longitud de la generatriz: $g = \sqrt{7^2 + 5^2} = 8{,}6 \text{ cm}$

$A_{\text{lateral}} = \pi rg = \pi \cdot 5 \cdot 8{,}6 = 43\pi = 135{,}02 \text{ cm}^2$

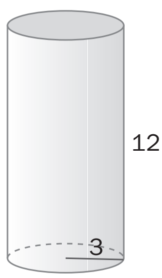
$A_{\text{cono}} = \pi rg + \pi r^2 = 43\pi + \pi \cdot 5^2 = 68\pi = 213{,}62 \text{ cm}^2$

10.11 **Calcula el volumen de los siguientes cuerpos. Las medidas están dadas en centímetros.**

a)



b)

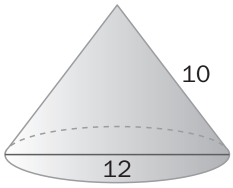


a) $V = A_{\text{base}} \cdot h = 5 \cdot 3 \cdot 10 = 150 \text{ cm}^3$

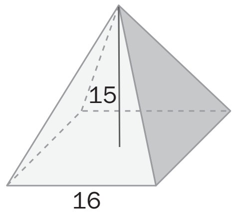
b) $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 339{,}29 \text{ cm}^3$

10.12 Halla el volumen de los siguientes cuerpos, cuyas medidas están dadas en centímetros.

a)



b)



a) $V = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = 301{,}59 \text{ cm}^3$

b) $V = \dfrac{16^2 \cdot 15}{3} = 1\,280 \text{ cm}^3$

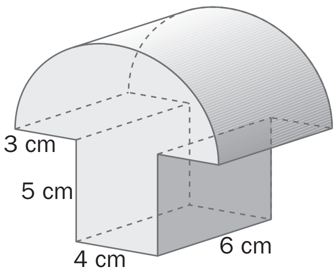
10.13 Halla el volumen de una esfera cuyo diámetro mide 12 centímetros.

$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 904{,}78 \text{ cm}^3$

10.14 El volumen de una esfera es de 500 centímetros cúbicos. Calcula el área de dicha esfera.

Se calcula la longitud del radio: $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 500}{4\pi}} = 4{,}9 \text{ cm} \Rightarrow A = 4\pi \cdot r^2 = 301{,}57 \text{ cm}^2$

10.15 Calcula el área y el volumen de este cuerpo.

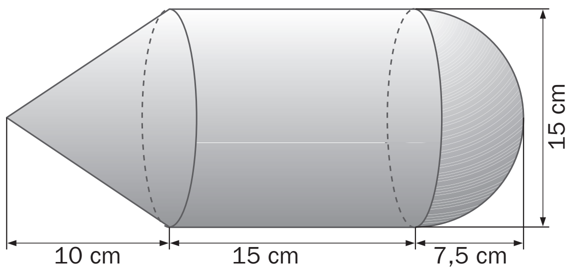


$A_1 = \pi \cdot 5 \cdot 6 + \pi \cdot 5^2 + 36 = 55\pi + 36 = 208{,}7 \text{ cm}^2$; $A_2 = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 40 + 60 + 24 = 124 \text{ cm}^2$

$A = 208{,}7 + 124 = 332{,}7 \text{ cm}^2$

$V_1 = \dfrac{\pi \cdot r^2 h}{2} = \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 6}{2} = 235{,}5 \text{ cm}^3$; $V_2 = 5 \cdot 4 \cdot 6 = 120 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 235{,}5 + 120 = 355{,}5 \text{ cm}^3$

10.16 Determina el área y el volumen del siguiente cuerpo.



Se calcula la longitud de la generatriz del cono: $g = \sqrt{10^2 - 7{,}5^2} = 6{,}61 \text{ cm}$

$A_1 = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 7{,}5 \cdot 6{,}61 = 155{,}67 \text{ cm}^2$; $A_2 = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 7{,}5 \cdot 15 = 706{,}5 \text{ cm}^2$; $A_3 = 2\pi \cdot 7{,}5^2 = 353{,}25 \text{ cm}^2$

$A = 155{,}67 + 706{,}5 + 353{,}25 = 1\,215{,}42 \text{ cm}^2$

$V_1 = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 10}{3} = 588{,}75 \text{ cm}^3$; $V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 15 = 2\,649{,}38 \text{ cm}^3$;

$V_3 = \dfrac{2\pi r^3}{3} = \dfrac{2\pi \cdot 7{,}5^3}{3} = 883{,}13 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 588{,}75 + 2\,649{,}38 + 883{,}13 = 4\,121{,}26 \text{ cm}^3$

10.17 Dos ciudades se encuentran situadas sobre dos meridianos que forman un ángulo de 225°. ¿Cuál será su diferencia horaria?

$\frac{225}{15} = 15$ horas

10.18 Halla el área de la superficie terrestre sabiendo que el radio de la Tierra mide, aproximadamente, 6 371 kilómetros.

$A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,371^2 = 509\,805\,891 \text{ km}^2$

10.19 Halla la distancia entre los dos puntos terrestres. *A*(10° O, 25° S) *B*(10° O, 55° S)

Como están en el mismo meridiano (10° O), la distancia en grados es $55° - 25° = 30°$.

$$\text{dist} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 30° \cdot 6\,371}{360°} = 3\,334{,}16 \text{ km}$$

10.20 Las coordenadas geográficas de una ciudad son (15° E, 45° N). ¿Cuál es la distancia al ecuador medida sobre el meridiano de dicha ciudad?

Como está a 45° N $\Rightarrow$ $\text{dist} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 45° \cdot 6\,371}{360°} = 5\,001{,}24 \text{ km}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

10.21 Una empresa que fabrica caramelos en forma de cubo de 1 centímetro de arista quiere preparar paquetes de 4 caramelos. ¿Qué tipo de envasado deberá realizar para reducir los costes al mínimo?

Se colocan los caramelos de manera que formen un ortoedro de dimensiones $2 \times 2 \times 1$ cm.

10.22 Las medidas, en centímetros, de un tetrabrik de leche son: 16,5 × 9,5 × 6. Un fabricante quiere empaquetar 12 tetrabriks. ¿Cómo debe envasarlos para que el gasto sea mínimo?

Se colocan de manera que formen un ortoedro de dimensiones $3 \times 2 \times 2$ tetrabriks, donde la altura es 33 cm ($16{,}5 \times 2$), la longitud 19 cm ($9{,}5 \times 2$) y la anchura 18 cm (6×3). La superficie del plástico necesario es 3126 cm^2.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Poliedros y cuerpos redondos. Propiedades

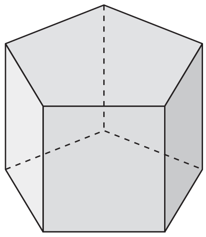
10.23 Un poliedro regular tiene 8 vértices y 12 aristas. Utiliza la fórmula de Euler para saber de qué poliedro se trata.

$C + V = A + 2$; $C = A - V + 2 \Rightarrow C = 12 - 8 + 2 = 6$. Se trata de un cubo.

10.24 Queremos construir con alambre el esqueleto de un tetraedro de 8 centímetros de arista. ¿Cuánto alambre necesitamos?

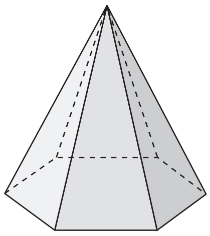
Como el tetraedro tiene 6 aristas, son necesarios $6 \cdot 8 = 48$ cm de alambre.

10.25 **Dibuja un prisma pentagonal recto, e indica cuántas aristas, cuántas caras y cuántos vértices tiene.**



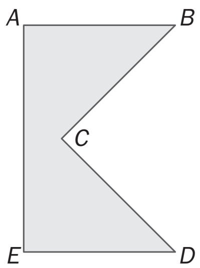
El prisma tiene 15 aristas, 7 caras y 10 vértices.

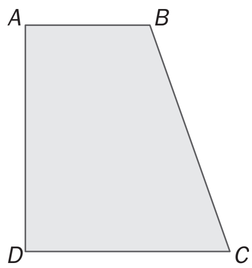
10.26 **Dibuja una pirámide hexagonal recta, e indica cuántas aristas, cuántas caras y cuántos vértices tiene.**



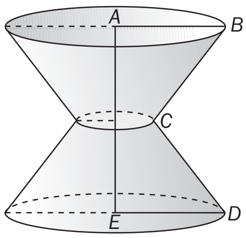
La pirámide tiene 12 aristas, 7 caras y 7 vértices.

10.27 **Dibuja la figura que se obtiene al hacer girar los siguientes polígonos sobre el lado que se indica.**

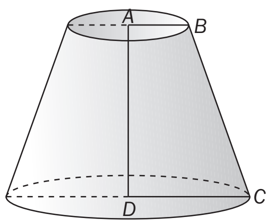




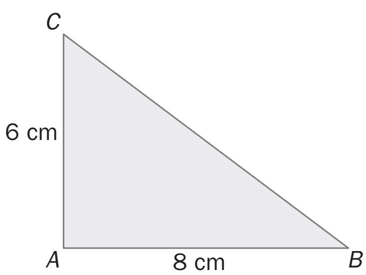
a) Lado *AE*

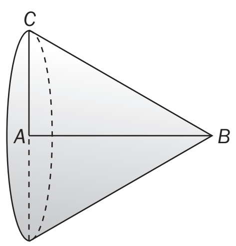


b) Lado *AD*



10.28 **El triángulo rectángulo *BAC* de la figura se hace girar sobre el cateto *AB*. Dibuja el cuerpo que se obtiene y calcula la longitud de su generatriz.**





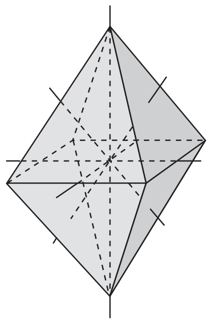
Generatriz: $g = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm

10.29 Las aristas del ortoedro de la figura miden 12, 4 y 3 centímetros, respectivamente. Halla la longitud de la diagonal *d*.

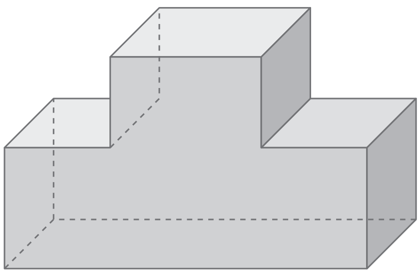
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$ cm

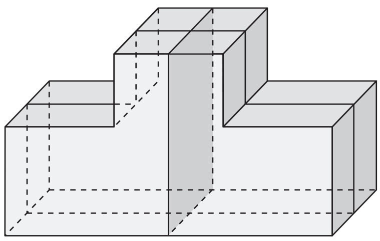
Simetría en poliedros y cuerpos redondos

10.30 Dibuja todos los ejes de simetría que se pueden trazar en un octaedro.



10.31 Queremos cortar el cuerpo de la figura, de manera que quede dividido en dos trozos exactamente iguales. Dibuja todos los posibles planos de simetría para resolver el problema.

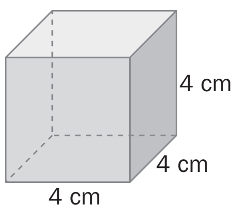




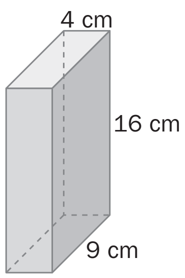
Áreas y volúmenes de poliedros, cilindros y conos

10.32 Calcula el área lateral y el área total de los siguientes cuerpos.

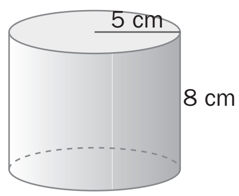
a)



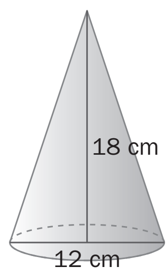
b)



c)



d)



a) $A_{\text{lateral}} = 4a^2 = 4 \cdot 4^2 = 64$ cm^2; $A_{\text{cubo}} = 6a^2 = 6 \cdot 4^2 = 96$ cm^2

b) $A_{\text{lateral}} = p \cdot h = 2 \cdot (4 + 9) \cdot 16 = 416$ cm^2; $A_{\text{poliedro}} = p \cdot h + 2$ Área base $= 416 + 2 \cdot 9 \cdot 4 = 488$ cm^2

c) $A_{\text{lateral}} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 8 = 251{,}2$ cm^2; $A_{\text{cilindro}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 251{,}2 + 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 251{,}2 + 157 = 408{,}2$ cm^2

d) Se calcula la longitud de la generatriz: $g = \sqrt{18^2 + 6^2} = 18{,}97$ cm

$A_{\text{lateral}} = \pi rg = \pi \cdot 6 \cdot 18{,}97 = 357{,}39$ cm^2; $A_{\text{cono}} = \pi rg + \pi r^2 = 357{,}39 + \pi \cdot 6^2 = 470{,}43$ cm^2

10.33 Un prisma recto, cuya base es un rectángulo de dimensiones 5 y 6 centímetros, tiene una altura de 15 centímetros. Calcula su volumen.

$V = \text{Área base} \cdot h = 5 \cdot 6 \cdot 15 = 450 \text{ cm}^3$

10.34 La generatriz de un cono mide 6 centímetros y el radio de su base mide 3 centímetros. Calcula:

a) La altura del cono.

b) Su área lateral.

c) Su área total.

d) Su volumen.

a) Se calcula la altura aplicando el teorema de Pitágoras: $\sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2$ cm

b) $A_{\text{lateral}} = \pi rg = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 56{,}52 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{cono}} = \pi rg + \pi r^2 = 56{,}52 + \pi \cdot 3^2 = 84{,}78 \text{ cm}^2$

d) $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{3{,}14 \cdot 32 \cdot 5{,}2}{3} = 48{,}984 \text{ cm}^3$

10.35 El volumen de un depósito cilíndrico es 1005,31 metros cúbicos y el radio de su base mide 4 metros. Calcula la altura del depósito.

Se sustituyen los datos en la fórmula:

$V_{\text{cilindro}} = \text{Área base} \cdot h;\ 1005{,}31 = \pi \cdot 4^2 \cdot h$

Se despeja la altura: $h = \dfrac{1005{,}31}{\pi \cdot 6^2} = 20$ m

10.36 Las pirámides de los faraones Keops y Micerinos se pueden encontrar muy próximas en Gizeh, aunque con proporciones bien distintas. La pirámide de Keops tiene base cuadrada de lado 230 metros y de altura 147 metros. El lado de la base cuadrada de la pirámide de Micerinos es 105 metros y la altura 65 metros.

a) Calcula el volumen de cada una de ellas.

b) ¿Cuántas veces es mayor la pirámide de Keops respecto a la de Micerinos?

a) $V_{\text{pirámide Keops}} = \dfrac{230^2 \cdot 147}{3} = 2\,592\,100 \text{ m}^3$

$V_{\text{pirámide Micerinos}} = \dfrac{105^2 \cdot 65}{3} = 238\,875 \text{ m}^3$

b) $\dfrac{2\,592\,100}{238\,875} = 10{,}85$

El volumen de la pirámide de Keops es 10,85 veces mayor que el de la de Micerinos.

La esfera

10.37 Calcula el área de una superficie esférica cuyo radio mide 7 centímetros.

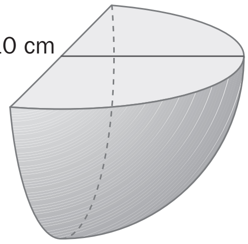
$A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 7^2 = 615{,}44 \text{ cm}^2$

10.38 Halla el volumen de una esfera cuyo diámetro mide 18 centímetros.

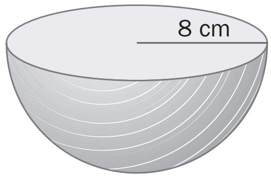
$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 9^3 = 3\,052{,}08 \text{ cm}^3$

10.39 **Averigua el volumen de cada uno de estos cuerpos.**

a)



b)



a) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^3 = 1\,047{,}20 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 8^3 = 1\,072{,}33 \text{ cm}^3$

10.40 **Calcula el volumen de una esfera cuya superficie esférica mide 1 256 centímetros cuadrados.**

Se calcula la longitud del radio: $r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \sqrt{\frac{1\,256}{4\pi}} = 10 \text{ cm}$

Se calcula el volumen: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 4\,186{,}67 \text{ cm}^3$

10.41 **En una superficie esférica de radio 10 centímetros, se tiene una circunferencia máxima y una circunferencia menor paralela a ella.**

Calcula la distancia entre sus centros sabiendo que el radio de la circunferencia menor es 5 centímetros.

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por los dos radios y el segmento que une los dos centros:

$d = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}66 \text{ cm}$

La Tierra. Coordenadas geográficas

10.42 **Calcula la superficie de cada uno de los husos horarios, sabiendo que el radio de la Tierra es, aproximadamente, 6 371 kilómetros.**

$A = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6\,371}{24} = 21\,252\,686{,}33 \text{ km}^2$

10.43 **Calcula la distancia que recorre un avión que vuela entre un punto de Europa de coordenadas geográficas (8° E, 45° N) y otro de América de coordenadas (70° O, 45° N), siguiendo el paralelo común.**

Como tiene la misma latitud y es 45° N, el avión sigue una circunferencia de radio:

$r^2 + r^2 = 6\,371^2 \Rightarrow r = 4\,505 \text{ km}$

El ángulo que recorre es $70° + 8° = 78°$

$\text{dist} = \frac{2 \cdot \pi\ 4\,505 \cdot 78°}{360°} = 6\,132{,}91 \text{ km}$

10.44 **Dos puntos *A* y *B* situados sobre el Ecuador tienen de longitud 20° E y 20° O. ¿Cuál es la distancia entre ambos? Recuerda que el Ecuador mide 40 030 km.**

$\text{dist} = \frac{40\,030 \cdot 40°}{360°} = 4\,447{,}78 \text{ km}$

10.45 **¿Qué nombre recibe la pirámide que tiene todas sus caras iguales?**

Tetraedro

10.46 **¿Qué cuerpo geométrico se forma al unir los centros de las caras de un tetraedro?**

Un tetraedro

10.47 **Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.**

a) Los cilindros son poliedros.

b) Un prisma regular recto pentagonal tiene siete caras.

c) El menor número de caras que concurren en el vértice de un poliedro es tres.

d) En cualquier poliedro todas las caras son iguales.

a) Falso, ya que los cilindros no tienen sus caras planas.

b) Verdadero, cinco caras laterales y dos de las bases.

c) Verdadero, ya que de lo contrario no se podría formar el poliedro.

d) Falso, hay poliedros que no tienen todas sus caras iguales.

10.48 **¿Cuántos ejes de simetría puedes trazar en una esfera?**

Tantos como se quiera siempre que pasen por el centro de la esfera.

10.49 **Describe los planos de simetría de un cilindro.**

Todos los planos que incluyan el segmento formado al unir los centros de las circunferencias de las bases son planos de simetría del cilindro. Además el plano paralelo a las bases que divide al cilindro en dos partes iguales también es plano de simetría.

10.50 **¿Qué condición tienen que cumplir los planos de simetría de una esfera?**

Que pasen por el centro de la esfera.

10.51 **Si el área total de un tetraedro es 48 centímetros cuadrados, ¿cuánto mide el área de su base?**

El área del tetraedro está formado por 4 triángulos equiláteros iguales, luego el área de la base es la de uno de los triángulos, por tanto:

$$A_{\text{base}} = \frac{48}{4} = 12 \text{ cm}^2$$

10.52 **Un cilindro y un cono tienen la misma base y el mismo volumen. ¿Qué diferencia de altura existe entre ambos?**

El cono debe ser tres veces más alto.

10.53 Disponemos de un cubo y de una esfera que tienen el mismo volumen, 125 centímetros cúbicos. ¿Cuál de ellos tiene mayor superficie?

Calculamos la arista del cubo: $a = \sqrt[3]{125} = 5$ cm

Calculamos la superficie del cubo: $S = 6a^2 = 6 \cdot 5^2 = 150$ cm^2

Se calcula la longitud del radio: $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 125}{4\pi}} = 3{,}1$ cm

Se calcula el área: $A = 4\pi \cdot r^2 = 120{,}7$ cm^2

Tiene mayor superficie el cubo.

10.54 Dos esferas de radios 5 y 7 centímetros tienen un solo punto en común. ¿Qué distancia hay entre sus centros?

Como las circunferencias son tangentes, la distancia entre sus centros es la suma de sus radios.

$5 + 7 = 12$

La distancia entre sus centros es 12 cm.

10.55 Una esfera y una semiesfera tienen el mismo volumen. ¿Qué relación existe entre sus radios?

Se despeja de la fórmula el radio de la esfera: $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

Se despeja de la fórmula el radio de la semiesfera: $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$

Se calcula el cociente de los radios: $\sqrt[3]{\frac{\frac{3V}{4\pi}}{\frac{3V}{2\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Luego el radio de la esfera es $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ el de la semiesfera.

10.56 Encuentra la relación que existe entre los volúmenes de un cono y de un cilindro, cuyas bases y alturas miden lo mismo.

Observando las fórmulas, el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.

10.57 ¿Existe algún paralelo que mida lo mismo que un meridiano? En caso afirmativo, di cuál es.

Sí. El ecuador.

10.58 ¿Cuántos grados abarca un huso horario?

$\frac{360°}{24} = 15°$

10.59 ¿Cuáles son las coordenadas geográficas del polo Norte y del polo Sur?

Polo Norte (0°, 90° N). Polo Sur (0°, 90° S)

10.60 Calcula la cantidad de lámina de hojalata necesaria para fabricar un bote de conservas de forma cilíndrica, cuya base tiene un diámetro de 16 centímetros y cuya altura mide 20 centímetros.

$A_{\text{cilindro}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 8 \cdot 20 + 2\pi \cdot 8^2 = 448\pi = 1\,406{,}72\ \text{cm}^2$

Se necesitan 1 406,72 cm² de lámina.

10.61 Una apisonadora tiene un rodillo de 1,20 metros de diámetro y 2,30 metros de largo. ¿Qué superficie de tierra apisona en cada vuelta de rodillo?

La superficie apisonada es igual al área lateral del cilindro del rodillo:

$A_{\text{lateral}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 0{,}6 \cdot 2{,}3 = 8{,}67\ \text{m}^2$

La superficie que apisona en cada vuelta es 8,67 m².

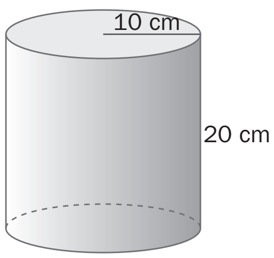
10.62 Una fábrica de bastones recibe un pedido de cajas de 80 centímetros de alto, 7 centímetros de ancho y 3 centímetros de largo. Calcula cuánto mide el bastón más largo que se puede embalar en una de estas cajas.

La distancia mayor que quepa dentro de la caja es la diagonal.

Se calcula la diagonal: $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{7^2 + 3^2 + 80^2} = 80{,}36$ cm

El bastón más largo que se puede embalar en las cajas es 80,36 cm.

10.63 Una empresa dona a una ONG 1 000 000 centímetros cúbicos de leche en polvo. Para envasarla, utilizan unos botes como los de la figura.



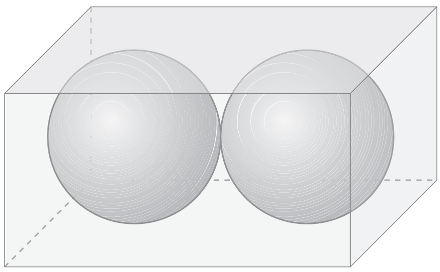
¿Cuántas unidades se necesitan?

Se calcula el volumen del cilindro: $V = \text{Área base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 20 = 6\,280\ \text{cm}^3$

Se calcula el número de botes necesario: $\dfrac{1\,000\,000}{6\,280} = 159{,}2$

Se necesitan 160 unidades.

10.64 En la caja de la figura se quieren guardar dos esferas macizas de 10 centímetros de radio. ¿Qué volumen ocupa el aire que queda en la caja?



$V_{\text{caja}} = 20 \cdot 10 \cdot 10 = 2\,000\ \text{cm}^3$; $V_{\text{esferas}} = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 5^3}{3} = 1\,047{,}2\ \text{cm}^3$

$V_{\text{aire}} = 2\,000 - 1\,047{,}2 = 952{,}8\ \text{cm}^3$

10.65 El volumen de un depósito cilíndrico es 1 695,60 metros cúbicos y el radio de su base mide 6 metros. Calcula la altura del depósito.

Se despeja de la fórmula la altura del cilindro:

$$h = \frac{V}{\text{Área base}} \qquad h = \frac{1\,695{,}6}{\pi \cdot 6^2} = 15 \text{ m}$$

La altura del depósito es 15 m.

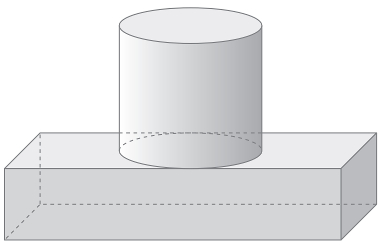
10.66 Un obelisco está formado por un prisma recto de base cuadrada coronado por una pirámide. El lado de la base mide 80 centímetros, mientras que la altura del prisma es de 10 metros y la altura total del obelisco es de 13 metros. Halla su volumen.

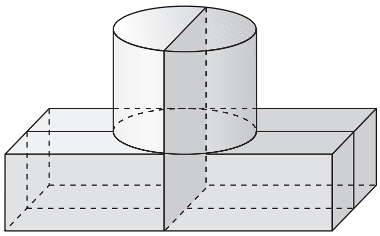
$$V_{\text{prisma}} = \text{Área base} \cdot h = 0{,}8^2 \cdot 10 = 6{,}4 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{\text{Área base} \cdot h}{3} = \frac{0{,}8^2 \cdot 3}{3} = 0{,}64 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{obelisco}} = 6{,}4 + 0{,}64 = 7{,}04 \text{ m}^3$$

10.67 El pedestal de una estatua como el de la figura, se quiere dividir en dos partes iguales. ¿De cuántas maneras se puede hacer?





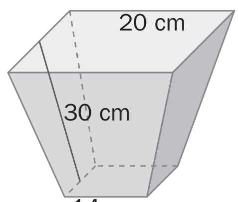
Se puede hacer de dos maneras distintas.

10.68 Un recipiente tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular como el de la figura. Calcula:

a) La altura del recipiente.

b) El área lateral.

c) El área total (observa que está abierto por arriba).

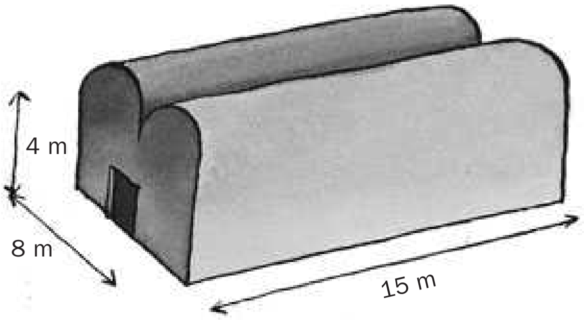


a) Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa la apotema del tronco de pirámide y por catetos la altura del tronco y la mitad de la diferencia de los lados de las bases. $h = \sqrt{30^2 - 3^2} = 29{,}85$ cm

b) $A_{\text{lateral}} = \dfrac{\text{Suma perímetros bases} \cdot \text{apotema tronco}}{2} = \dfrac{(4 \cdot 20 + 4 \cdot 14) \cdot 30}{2} = 2\,040 \text{ cm}^2$

c) $A = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = 2\,040 + 14^2 = 2\,236 \text{ cm}^2$

10.69 La nave de un almacén tiene la forma indicada en la figura. Determina el volumen de la nave.



La figura se puede descomponer en dos semicilindros y un ortoedro.

Se calcula el volumen de los semicilindros: $V = \text{Área base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 15 = 188{,}4\ m^3$

Se calcula el volumen del ortoedro: $V = \text{Área base} \cdot h = 15 \cdot 8 \cdot 4 = 480\ m^3$

El volumen de la nave es $188{,}4 + 480 = 668{,}4\ m^3$.

10.70 Dos puntos de la esfera terrestre se dice que están situados en las antípodas cuando son diametralmente opuestos; es decir, el segmento que los une pasa por el centro de la Tierra. Calcula las coordenadas de las antípodas de Roma cuyas coordenadas geográficas son (12° 40′ E, 41° 50′ N).

(167° 20′ O, 41° 50′ S)

R E F U E R Z O

Poliedros

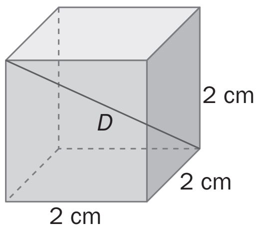
10.71 Señala cuántas caras, aristas y vértices tiene una pirámide hexagonal recta, y comprueba que verifica la fórmula de Euler.

Una pirámide hexagonal recta tiene 7 caras, 12 aristas y 7 vértices.

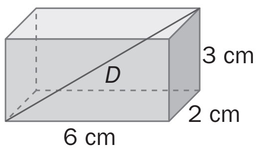
Se comprueba que verifica la fórmula de Euler: $C + V = A + 2$; $7 + 7 = 12 + 2$; $14 = 14$

10.72 Calcula los elementos que están señalados con una letra en los siguientes cuerpos.

a)



b)

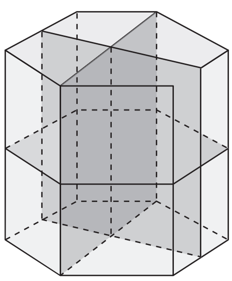


a) Se calcula la diagonal: $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 3{,}46$ cm

b) Se calcula la diagonal: $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7$ cm

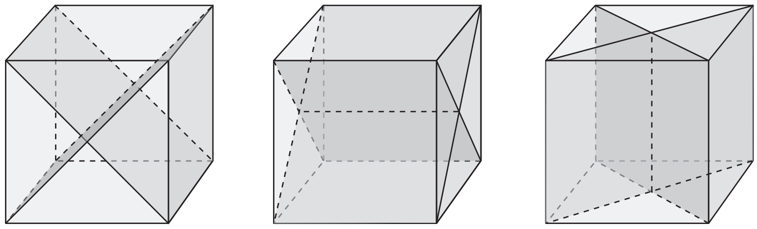
Simetría en poliedros y cuerpos redondos

10.73 Dibuja los planos de simetría de un prisma hexagonal recto.



Además de los de la figura hay otros 4 planos de simetría verticales análogos a los ya representados.

10.74 **Dibuja todos los planos de simetría de un cubo que pasen por dos aristas opuestas. ¿Cuántos hay?**

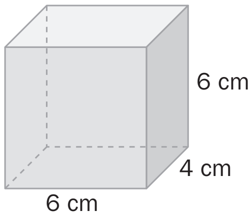


Hay 6 planos de simetría.

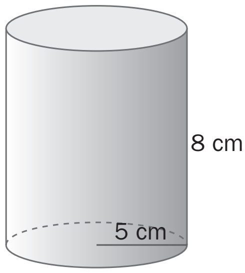
Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

10.75 **Halla el área lateral, el área total y el volumen de estos cuerpos geométricos.**

a)



b)

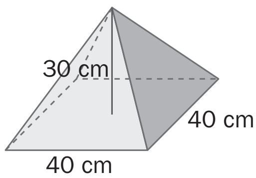


a) $A_l = 20 \cdot 6 = 120\ \text{cm}^2$; $A_t = 120 + 2 \cdot 6 \cdot 4 = 168\ \text{cm}^2$, $V = 4 \cdot 6 \cdot 6 = 144\ \text{cm}^3$

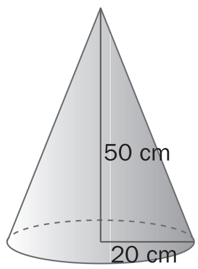
b) $A_l = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 8 = 251{,}2\ \text{cm}^2$; $A_t = 251{,}2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 = 408{,}2\ \text{cm}^2$, $V = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 8 = 628\ \text{cm}^3$

10.76 **Averigua el área lateral, el área total y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.**

a)



b)



a) $h = \sqrt{30^2 + 20^2} = 36{,}1$ cm; $A_l = 4 \cdot \dfrac{40 \cdot 36{,}1}{2} = 2\,888\ \text{cm}^2$; $A_t = 2\,888 + 40^2 = 4\,488\ \text{cm}^2$

$V = \dfrac{40^2 \cdot 30}{3} = 16\,000\ \text{cm}^3$

b) $g = \sqrt{20^2 + 50^2} = 53{,}85$; $A_l = \pi \cdot 20 \cdot 53{,}85 = 3\,383{,}6\ \text{cm}^2$; $A_t = 3\,381{,}78 + \pi \cdot 20^2 = 4\,640{,}24\ \text{cm}^2$

$V = \dfrac{\pi \cdot 20^2 \cdot 50}{3} = 20\,943{,}95\ \text{cm}^3$

10.77 **Un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 3 y 4 centímetros, respectivamente, gira alrededor del cateto mayor. Calcula el área total y el volumen del cuerpo que genera.**

$A_t = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 5 + 3{,}14 \cdot 3^2 = 75{,}36\ \text{cm}^2$

$V = \dfrac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 37{,}68\ \text{cm}^3$

La esfera y la Tierra

10.78 Halla el área y el volumen de las siguientes esferas.

a) Radio = 10 cm **b) Diámetro = 31 cm**

a) $A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^2 = 1\,256 \text{ cm}^2$; $V = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^3}{3} = 4\,186{,}67 \text{ cm}^3$

b) $A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 15{,}5^2 = 3\,017{,}54 \text{ cm}^2$; $V = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 15{,}5^3}{3} = 15\,590{,}62 \text{ cm}^3$

10.79 Una circunferencia, cuya longitud es de 15,70 centímetros, gira alrededor de un diámetro generando una esfera. Calcula el volumen de dicha esfera.

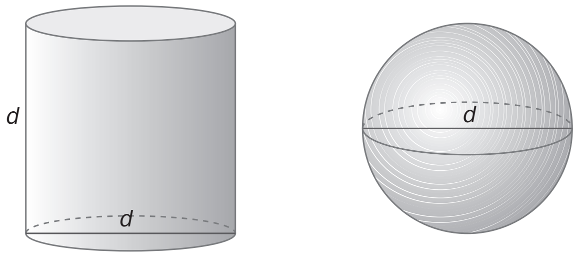
$15{,}70 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \Rightarrow r = 2{,}5 \text{ cm} \Rightarrow V = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^3}{3} = 65{,}42 \text{ cm}^3$

10.80 Dos puntos, *A* y *B*, situados sobre el ecuador, tienen de longitud 30° E y 15° O, respectivamente. ¿Cuál es la distancia entre ambos? Recuerda que el ecuador mide 40 030 kilómetros.

$\text{dist} = \dfrac{40\,030 \cdot 45°}{360°} = 5\,003{,}75 \text{ km}$

AMPLIACIÓN

10.81 Halla la relación que existe entre el volumen de la esfera y el del cilindro de la figura, sabiendo que el diámetro de la base del cilindro, su altura y el diámetro de la esfera miden lo mismo.



$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 \cdot d = \dfrac{\pi \cdot d^3}{4}$; $V_{\text{esfera}} = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{d}{2}\right)^3}{3} = \dfrac{\pi \cdot d^3}{6} \Rightarrow 2V_{\text{cilindro}} = 3V_{\text{esfera}}$

10.82 Un barco está situado en un punto de coordenadas (20° O, 60° S) y avanza en dirección este 15° sobre el mismo paralelo.

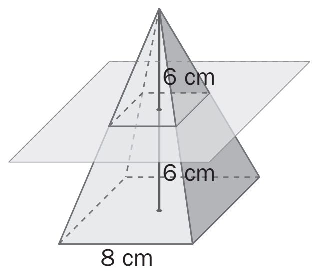
a) ¿En qué punto se encontrará situado? **b) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido?**

a) (5° O, 60° S)

b) $r = \dfrac{6\,371}{2} = 3\,185{,}5 \text{ km} \Rightarrow \text{dist} = \dfrac{2 \cdot \pi\, 3\,185{,}5 \cdot 15°}{360°} = 833{,}96 \text{ km}$

10.83 La pirámide de la figura se corta con un plano paralelo a la base por el punto medio de la altura de la pirámide.

Calcula la relación que existe entre los volúmenes de las dos figuras resultantes.



Al ser figuras semejantes de razón 2, el volumen de la pirámide mayor es 8 veces (2^3) el de la menor.

$V_{\text{pirámide pequeña}} = \dfrac{1}{8} V_{\text{pirámide grande}}$ $V_{\text{tronco de pirámide}} = \dfrac{7}{8} V_{\text{pirámide grande}}$ $V_{\text{tronco de pirámide}} = 7\, V_{\text{pirámide pequeña}}$

10.84 Una esfera de 20 centímetros de radio se corta con un plano a 12 centímetros del centro. Averigua la longitud de la circunferencia que se origina al cortar la superficie esférica con el plano.

$r = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ cm $\Rightarrow l = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 16 = 100{,}48$ cm

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

10.85 Jardín de piedra

Se quiere extender 4 toneladas y media de gravilla sobre una superficie rectangular de 15 metros de largo y 3 de ancho.

Se sabe que un metro cúbico de este tipo de gravilla pesa 2 000 kilogramos.

a) ¿Qué altura en centímetros tendrá la capa de gravilla que se va a extender?

b) Si se quiere aumentar en un 25 % la superficie en la que se va a echar la gravilla y conservando la altura de la capa, ¿cuántos kilogramos más de gravilla se deberán comprar?

c) Si utilizamos otra clase de gravilla, menos densa, de 1 500 kilogramos por metro cúbico, ¿qué superficie podremos cubrir si la capa de gravilla alcanza la misma altura que en los casos anteriores?

a) Se cuenta con 4,5 t = 4 500 kg de gravilla que ocupará un volumen de 2,25 m^3.

El volumen de la capa será de $15 \cdot 3 \cdot h = 2{,}25 \text{ m}^3 \Rightarrow h = \frac{2{,}25}{15 \cdot 3} = 0{,}05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$

b) La cantidad de kg nuevos que se han de adquirir es el 25 % de los que se tenía inicialmente.

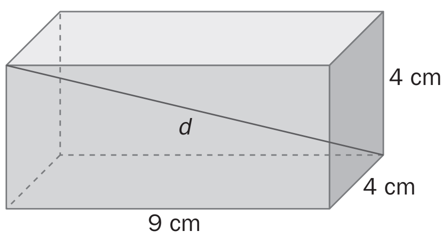
Por tanto $4\,500 \cdot 0{,}25 = 1\,125$ kg

c) En este caso 4,5 t = 4 500 kg de gravilla que ocupará un volumen de 3 m^3.

El volumen de la capa será de $15 \cdot 3 \cdot h = 3 \text{ m}^3 \Rightarrow h = \frac{3}{15 \cdot 3} = 0{,}067 \text{ m} = 6{,}7 \text{ cm}$

AUTOEVALUACIÓN

10.A1 Calcula la longitud de la diagonal del prisma cuadrangular recto de la figura.



$d = \sqrt{9^2 + 4^2 + 4^2} = 10{,}63$ cm

10.A2 Queremos pintar el techo y las paredes de una habitación de 4 metros de largo por 3,5 metros de ancho y 3 metros de alto. Sabiendo que la pintura cuesta 3 euros por cada metro cuadrado de pared, ¿cuánto nos costará pintar la habitación?

$A = 4 \cdot 3,5 + 2 \cdot 3,5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 59 \text{ m}^2 \Rightarrow \text{Precio} = 59 \cdot 3 = 177$ €

10.A3 En un cubo, cuya arista mide 4 centímetros, introducimos una esfera maciza tangente a las caras del cubo. Determina el volumen del espacio comprendido entre ambos cuerpos.

$$V_{\text{cubo}} = 4^3 = 64 \text{ cm}^3;\ V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 2^3}{3} = 33,51 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 64 - 33,51 = 30,49 \text{ cm}^3$$

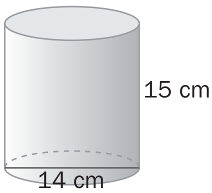
10.A4 Las coordenadas geográficas de dos ciudades son: *A*(10° E, 45° N) y *B*(10° O, 45° N). Calcula la distancia entre ambas, teniendo en cuenta que el radio de la Tierra es 6 371 kilómetros.

Como tiene la misma latitud y es 45° N, $\Rightarrow r^2 + r^2 = 6\,371^2 \Rightarrow r = 4\,505$ km

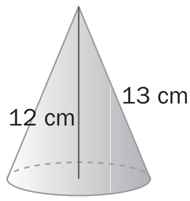
$$\text{dist} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4\,505 \cdot 20°}{360°} = 1\,572,54 \text{ km}$$

10.A5 Averigua el área lateral y el área total de estos cuerpos geométricos.

a)



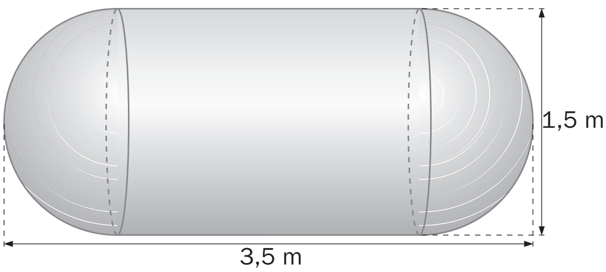
b)



a) $A_l = \pi \cdot 14 \cdot 15 = 659,73 \text{ cm}^2;\ A_t = 659,4 + 2 \cdot \pi \cdot 7^2 = 967,61 \text{ cm}^2$

b) $A_l = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 204,2 \text{ cm}^2;\ A_t = 204,2 + \pi \cdot 5^2 = 282,74 \text{ cm}^2$

10.A6 Para abastecer de agua algunas zonas de África, una empresa dona depósitos como el de la figura. Calcula el volumen de cada depósito.



$$V = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 0,75^3}{3} + 3,14 \cdot 0,75^2 \cdot 2 = 5,3 \text{ m}^3$$

10.A7 Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

a) Pirámide de base cuadrada, de 7 centímetros de altura, cuya base tiene una arista de 6 centímetros.

b) Prisma recto de base hexagonal, de 8 centímetros de altura, cuya base tiene una arista de 2 centímetros.

a) $V = \dfrac{6^2 \cdot 7}{3} = 84 \text{ cm}^3$

b) $V = \dfrac{6 \cdot 2 \cdot 1,73}{2} \cdot 8 = 83,04 \text{ cm}^3$