EJERCICIOS PROPUESTOS

4.1 Relaciona cada enunciado con su expresión algebraica.

Múltiplo de 3. →	$3x$
Número par. →	$2x$
El cuadrado de un número más 3. →	$x^2 + 3$
Un número más 5. →	$x + 5$
El triple de un número más 7. →	$3x + 7$

4.2 Escribe las expresiones algebraicas correspondientes.

a) Tres números consecutivos.

b) Tres números pares consecutivos.

a) x, $(x + 1)$, $(x + 2)$

b) $2x$, $2(x + 1)$, $2(x + 2)$

4.3 Expresa en forma algebraica el área y el volumen de un cubo cuya arista mide x centímetros.

Área: x^2

Volumen: x^3

4.4 El largo y el ancho de esta piscina son datos desconocidos, pero sabemos que el largo es el doble que el ancho.

Escribe las expresiones algebraicas que nos dan el perímetro y el área de la piscina.

Si el ancho es x, el largo es $2x$.

Perímetro: $x + 2x + x + 2x = 6x$; Área: $x \cdot 2x = 2x^2$

4.5 Averigua, para estos valores de x, el valor numérico de la expresión: $x^2 - 7x + 10$.

a) $x = 2$

b) $x = 1$

c) $x = 3$

d) $x = 5$

a) $2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 0$

b) $1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 4$

c) $3^2 - 7 \cdot 3 + 10 = -2$

d) $5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$

4.6 Obtener el valor numérico puede ayudar a comprobar si una igualdad es falsa; basta sustituir la x por números sencillos cualesquiera. Comprueba si son falsas estas igualdades.

a) $x \cdot x \cdot x = 3x$

b) $x^2 \cdot x^4 = x^6$

c) $(x^2)^3 = x^5$

d) $x^2 + x^3 = x^5$

a) Si $x = 2$; $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 3 \cdot 2 = 6$

b) Cierta, por las propiedades de las potencias

c) Si $x = 2$; $(2^2)^3 = 64 \neq 2^5 = 32$

d) Si $x = 1$; $1^2 + 1^3 = 2 \neq 1^5 = 1$

4.7 El valor numérico de las siguientes expresiones es 0 para algunos números. Indica cuáles son.

a) $x^2 - 64$

b) $x^3 - 1000$

c) $x^2 + 25$

d) $x^3 + 64$

a) $x = 8$ y $x = -8$

b) $x = 10$

c) La expresión nunca es 0.

d) $x = -4$

4.8 Relaciona cada expresión algebraica con una equivalente.

$x(y + z) \rightarrow xy + xz$

$x + y \rightarrow y + x$

$y + 2x + y \rightarrow 2(x + y)$

4.9 Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios.

a) $3{,}7x^2$ **b)** $\frac{1}{3}x^3$ **c)** $\left(\frac{x}{3}\right)^3$ **d)** $\frac{x + y + z}{11}$

Son todas monomios menos la del apartado d.

4.10 Escribe el coeficiente, la parte literal y el grado de cada monomio.

a) $7x^2y$ **b)** $6xy^4z^2$ **c)** $-23x^5y^4$ **d)** $-9x^2yz^3$

a) Coeficiente: 7. Parte literal: x^2y. Grado: 3.

b) Coeficiente: 6. Parte literal: xy^4z^2. Grado: 7.

c) Coeficiente: -23. Parte literal: x^5y^4. Grado: 9.

d) Coeficiente: -9. Parte literal: x^2yz^3. Grado: 6.

4.11 Escribe un monomio semejante a cada uno de estos monomios.

a) $7xyz$ **b)** $-11x^4y^2$ **c)** $3x^4y^5$ **d)** $13x^7y^3$

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $-xyz$ b) $2x^4y^2$ c) $-3x^4y^5$ d) $26x^7y^3$

4.12 Un alumno define el grado de un monomio como el número de factores que forman su parte literal.

a) ¿Coincide esta definición con la dada?

b) Aplica las dos definiciones al monomio $3x^2y^4$.

a) Sí.

b) Con la primera definición, el grado es $2 + 4 = 6$.

Con la segunda definición hemos de tener en cuenta que $x^2y^4 = x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$, hay 6 factores, el grado es 6.

4.13 Halla el monomio que permite calcular el área de los rectángulos cuya base es el doble que la altura.

Altura: x. Base: $2x$. Área: $2x^2$

4.14 ¿Cuáles de estas expresiones algebraicas son polinomios?

a) $\frac{5}{2a + b}$ **b)** $\frac{2 + x}{2}$ **c)** $\frac{1}{3}x + 1 - \frac{2}{4}x^2$ **d)** $2^x + 1$

Son polinomios b y c.

4.15 Indica el grado de estos polinomios.

a) $x^5 - 7x + 1$ **b)** $1 - x^3$ **c)** $1 + x + x^2$ **d)** $x^7 - x^{11} - 11$

a) Tiene grado 5. b) Tiene grado 3. c) Tiene grado 2. d) Tiene grado 11.

4.16 Indica el grado de los siguientes polinomios.

a) $3xy^2 + 2x^2y + 5x^2y^2$ **b)** $2zt + 3t^3 + 2z^5$

a) Tiene grado 4. b) Tiene grado 5

4.17 Determina el valor numérico de cada polinomio para $x = 10$.

a) $x^3 + x + 1$

b) $-x^4 - x^2$

c) $2x^4 - x^2 - 1$

d) $x^6 - x^3$

a) $10^3 + 10 + 1 = 111$

b) $-10^4 - 10^2 = -10\,100$

c) $2 \cdot 10^4 - 10^2 - 1 = 19\,799$

d) $10^6 - 10^3 = 999\,000$

4.18 Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ para los valores $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$

$P(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 0$

$P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 6 = 0$

4.19 Reduce términos en estas expresiones.

a) $8x - 7y - 5x$

b) $x^3 - 6z^3 - 4z^3 + 2x^3$

c) $12xy^2 - xy^2 - 4yx^2$

d) $2xy + 3x + x^4 - 3x$

a) $3x - 7y$

b) $3x^3 - 10z^3$

c) $11xy^2 - 4yx^2$

d) $2xy + x^4$

4.20 La suma de dos monomios es $10x^5$. Indica qué monomios pueden ser.

a) $7x^2$ y $3x^3$

b) $7x^5$ y $3x^5$

c) $6x^4$ y $4x$

d) $9x^5$ y $9x^5$

Los del apartado b.

4.21 Con los siguientes polinomios.

$P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 11$

$Q(x) = 4x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 12$

$R(x) = 3x^5 - 7x^4 + 6x - 5$

Realiza estas operaciones.

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - R(x)$

c) $R(x) + Q(x)$

d) $R(x) - Q(x)$

e) $P(x) + Q(x) - R(x)$

f) $P(x) - Q(x) + R(x)$

a) $7x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1$

b) $-3x^5 + 10x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 6x - 6$

c) $3x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 6x + 7$

d) $3x^5 - 11x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 6x - 17$

e) $-3x^5 - 2x^3 - 6x^2 - 6x + 6$

f) $3x^5 - 8x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 6x - 28$

4.22 Realiza estos productos de monomios.

a) $(2y) \cdot (3z)$

b) $(3xy^2) \cdot (-5x^2yz)$

c) $(-5ab^2c) \cdot (4a^3c) \cdot (b^2c)$

d) $(12xy) \cdot (6x^2) \cdot (x^2y^3)$

a) $6yz$

b) $-15x^3y^3z$

c) $-20a^4b^4c^3$

d) $72x^5y^4$

4.23 Multiplica el monomio por el polinomio.

a) $x^2 \cdot (3x^2 - 5x + 1)$

b) $5zt \cdot (2z^2t - 3zt^3)$

c) $ab \cdot (2ab^2 + 3c - ab)$

d) $2xy^2 \cdot (5x + 2y - 3xy)$

a) $3x^4 - 5x^3 + x^2$

b) $10z^3t^2 - 15z^2t^4$

c) $2a^2b^3 + 3abc - a^2b^2$

d) $10x^2y^2 + 4xy^3 - 6x^2y^3$

4.24 Calcula estos productos de binomios.

a) $(x^2 + 11) . (x^2 - 11)$

b) $(x^3 + y^3) . (7x + 2)$

c) $(2x - 3y) \cdot (x - y)$

d) $(3tz - 2t^2) \cdot (tz - z^2)$

a) $x^4 - 121$

b) $7x^4 + 2x^3 + 7xy^3 + 2y^3$

c) $2x^2 - 5xy + 3y^2$

d) $3t^2z^2 - 3tz^3 - 2t^3z + 2t^2z^2$

4.25 Saca factor común en estas expresiones.

a) $x^3 - 7x^4 + 2x^2y$

b) $-4z^2x - 2zx^4 - 12zx$

c) $3t^5 + 21t^3x^4 + 15t^2x$

d) $6x^4y - 24x^7y + 12x^3y^5$

a) $x^2(x + 7x^2 + 2y)$

b) $2xz(-2z - x^3 - 6)$

c) $3t^2(t^3 + 7tx^4 + 5x)$

d) $6x^3y(x - 4x^4 + 3y)^4$

4.26 Realiza estos productos.

a) $(2x^2 + x + 1) \cdot (x - 3)$

b) $(3x^3 - x^2 + 3) \cdot (2x + 1)$

a) $2x^3 + x^2 + x - 6x^2 - 3x - 3 = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$

b) $6x^4 - 2x^3 + 6x + 3x^3 - x^2 + 3 = 6x^4 + x^3 - x^2 + 6x + 3$

4.27 Efectúa estos productos de polinomios.

a) $(x^5 - 6x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \cdot (x^3 - 3x + 1)$

b) $(x^4 - 7x^3 + x^2 - 1) \cdot (x^3 + 4x^2 - 6x + 2)$

a) $x^8 - 6x^6 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 3x^6 + 18x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x + x^5 - 6x^3 - 3x^2 + 2x - 1 =$
$= x^8 - 9x^6 - 2x^5 + 20x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 5x - 1$

b) $x^7 + 4x^6 - 6x^5 + 2x^4 - 7x^6 - 28x^5 + 42x^4 - 14x^3 + x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - x^3 - 4x^2 + 6x - 2 =$
$= x^7 - 3x^6 - 33x^5 + 48x^4 - 21x^3 - 2x^2 + 6x - 2$

4.28 Desarrolla estas potencias.

a) $(2x + y + 1)^2$

b) $(2ab - 1 + a)^2$

c) $(2a + 1)^3$

d) $(1 - 3t)^3$

a) $(2x + y + 1) \cdot (2x + y + 1) = 4x^2 + 2xy + 2x + 2xy + y^2 + y + 2x + y + 1 = 4x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 1$

b) $(2ab - 1 + a) \cdot (2ab - 1 + a) = 4a^2b^2 - 2ab + 2a^2b - 2ab + 1 - a + 2a^2b - a + a^2 = 4a^2b^2 + 4a^2b + a^2 - 4ab - 2a + 1$

c) $(2a + 1)^2(2a + 1) = (4a^2 + 4a + 1) \cdot (2a + 1) = 8a^3 + 4a^2 + 8a^2 + 4a + 2a + 1 = 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$

d) $(1 - 3t)^2(1 - 3t) = (1 - 6t + 9t^2) \cdot (1 - 3t) = 1 - 3t - 6t + 9t^2 + 9t^2 - 27t^3 = -27t^3 + 18t^2 - 9t + 1$

4.29 Comprueba la veracidad de estas igualdades. Si alguna es falsa, escribe el resultado verdadero.

a) $(2x^3 + 3x)^2 = 4x^6 + 9x^2 + 12x^4$

b) $(2x^3 - 5x)^2 = 4x^6 - 25x^2 + 20x^4$

c) $(5x + 3)(5x - 3) = 25x^2 + 9$

d) $(3x^2 - 4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

a) Cierta

b) Falsa. $(2x^3 - 5x)^2 = 4x^6 + 25x^2 - 20x^4$

c) Falsa. $(5x + 3)(5x - 3) = 25x^2 - 9$

d) Falsa. $(3x^2 - 4y)^2 = 9x^4 + 16y^2 - 24x^2y$

4.30 Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las igualdades notables.

a) $(a + 3b)^2$

b) $(a - 3b)^2$

c) $(3a + b)^2$

d) $(a + 3b) \cdot (a - 3b)$

a) $a^2 + 9b^2 + 6ab$

b) $a^2 + 9b^2 - 6ab$

c) $9a^2 + b^2 + 6ab$

d) $a^2 - 9b^2$

4.31 A partir de esta igualdad $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$, resuelve estas operaciones.

a) $11^2 - 10^2$ **b)** $75^2 - 25^2$ **c)** $999^2 - 1$ **d)** $650^2 - 150^2$

a) $11^2 - 10^2 = (11 + 10) \cdot (11 - 10) = 21$

b) $75^2 - 25^2 = (75 + 25) \cdot (75 - 25) = 5\,000$

c) $999^2 - 1 = (999 + 1) \cdot (999 - 1) = 998\,000$

d) $650^2 - 150^2 = (650 + 150) \cdot (650 - 150) = 400\,000$

4.32 Expresa como una potencia estos polinomios.

a) $9x^2 + y^2 + 6xy$

b) $25y^2 + 100 + 100y$

c) $x^2 + 49 - 14x$

d) $x^4 + 12x^2 + 36$

a) $(3x + y)^2$

b) $(5y + 10)^2$

c) $(x - 7)^2$

d) $(x^2 + 6)^2$

4.33 Halla la fórmula que nos permite calcular el número de saludos que se intercambia un grupo de 40 amigos que se ven después de las vacaciones.

Resolvemos el problema para cuando son pocos amigos.

Cuando son dos amigos: 1 saludo.

Cuando son tres amigos: 3 saludos; $3 = \dfrac{3 \cdot 2}{2}$

Cuando son cuatro amigos: 6 saludos; $6 = \dfrac{4 \cdot 3}{2}$

Cuando son n amigos: $\dfrac{n \cdot (n - 1)}{2}$. Lo cual es lógico, puesto que cada persona saluda a $(n - 1)$ personas, tendríamos así $n \cdot (n - 1)$, pero es que en este recuento está contado cada saludo dos veces, con lo cual dividimos entre 2.

En el caso de 40 amigos nos da como resultado: $\dfrac{40 \cdot 39}{2} = 780$ saludos.

4.34 Determina la fórmula que da el número de diagonales de los polígonos convexos de 20 lados.

Resolvemos el problema para polígonos de menos lados.

Un triángulo no tiene diagonales.

Un cuadrilátero tiene 2 $\left(\dfrac{4 \cdot 1}{2}\right)$ diagonales.

Un pentágono tiene 5 $\left(\dfrac{5 \cdot 2}{2}\right)$ diagonales.

Un hexágono tiene 9 $\left(\dfrac{6 \cdot 3}{2}\right)$ diagonales.

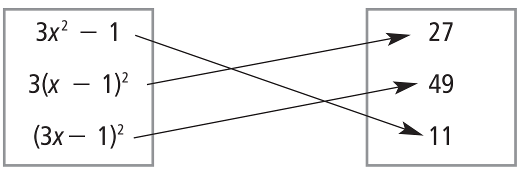
Generalizando, tenemos que para un polígono de n lados, el número de diagonales es: $\dfrac{n \cdot (n - 3)}{2}$

Así, si es un polígono de 20 lados, tendrá $\dfrac{20 \cdot 17}{2} = 170$ diagonales.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Expresiones algebraicas y su valor numérico

4.35 Relaciona cada expresión algebraica con su valor numérico para $x = -2$.



4.36 Calcula x, en cada caso, si el valor numérico de las siguientes expresiones es 0.

a) $3x - 24$ **b)** $\dfrac{7x}{56} - 1$ **c)** $(x + 2)^3$ **d)** $\sqrt{x} - 7$

a) $3x - 24 = 0 \Rightarrow x = 8$

b) $\dfrac{7x}{56} - 1 = 0 \Rightarrow x = 8$

c) $(x + 2)^3 = 0 \Rightarrow x = -2$

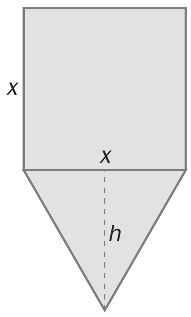
d) $\sqrt{x} - 7 = 0 \Rightarrow x = 49$

4.37 Escribe la expresión algebraica que genera estos valores. 3 6 9 12 15...

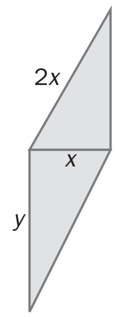
La expresión es $3n$, siendo n un número natural.

4.38 Escribe la expresión algebraica del área de cada figura.

a)



b)



a) $x^2 + \dfrac{x \cdot h}{2}$

b) Calculamos la altura del triángulo por el teorema de Pitágoras: $4x^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}\,x$

Así, el área del triángulo de arriba es: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$

Del triángulo de abajo conocemos la base y la altura. Así, el área resulta: $\dfrac{x \cdot y}{2}$

Si sumamos las dos áreas, obtenemos el área de la figura: $\dfrac{\sqrt{3}x^2 + xy}{2}$

4.39 Expresa en forma algebraica cada frase.

a) Los cuadrados de tres números consecutivos.

b) Dos números que sumen 34.

c) El doble de un número menos cuatro quintos del mismo número.

d) El 30 % de un número impar.

a) $x^2, (x + 1)^2, (x + 2)^2$

b) $x, 34 - x$

c) $2x - \dfrac{4}{5}x$

d) $0{,}3 \cdot (2k + 1)$

4.40 El monedero de una persona contiene las siguientes monedas.

***x* monedas de 1 euro.**

***y* monedas de 50 céntimos.**

***z* monedas de 20 céntimos.**

***m* monedas de 10 céntimos.**

***t* monedas de 5 céntimos.**

Halla la expresión algebraica que expresa el dinero, en euros, que tiene en el monedero.

Tiene: $x + 0{,}50y + 0{,}20z + 0{,}10m + 0{,}05t$ €

Monomios y polinomios

4.41 Indica si son monomios estas expresiones algebraicas.

a) $5xyz$ **b)** $\dfrac{8x}{y}$ **c)** $7z^3y^{-4}$ **d)** $12\sqrt{x}y^3$

a) Es monomio.

b) No es un monomio porque el exponente de y no es natural.

c) No es un monomio porque el exponente de y no es natural.

d) No es un monomio porque el exponente de x no es natural.

4.42 Indica el coeficiente, parte literal y grado de cada monomio.

a) $8x^2$ **b)** $\dfrac{7}{5}z^4m^3$ **c)** $\dfrac{xy^5}{8}$ **d)** $\dfrac{3}{2}yz^4$

a) Coeficiente: 8. Parte literal: x^2. Grado: 2.

b) Coeficiente: $\dfrac{7}{5}$. Parte literal: z^4m^3. Grado: 7.

c) Coeficiente: $\dfrac{1}{8}$. Parte literal: xy^5. Grado: 6.

d) Coeficiente: $\dfrac{3}{2}$. Parte literal: yz^4. Grado: 5.

4.43 ¿Cuál de los siguientes monomios es el de mayor grado?

$3x^2yz^3$ $7y^4z^3$ $8z^5$ $4y^6$

El segundo, $7y^4z^3$, que tiene grado 7.

4.44 Escribe el polinomio que cumple las siguientes características.

Binomio en la variable z.
De grado 5.
Con coeficiente del término principal 8.
Término independiente -7.

El polinomio que cumple las características es: $8z^5 - 7$

4.45 Calcula el término independiente, a, del polinomio $xz^2 - 4x^2 + 3z + a$, sabiendo que el valor numérico para $x = -1$ y $z = 2$ es 10.

Sustituimos las variables por los valores numéricos en el polinomio: $(-1) \cdot 2^2 - 4 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 2 + a$

El resultado de dicha sustitución es igual a 10, de modo que $-4 - 4 + 6 + a = 10 \Rightarrow a = 12$.

Operaciones con monomios y polinomios

4.46 Realiza estas sumas de monomios.

a) $-4zy^3 + 7zy^3 - 15zy^3 + 22zy^3$

b) $\dfrac{-xyz}{2} + \dfrac{2}{3}xyz$

c) $-3xy + 2xz + 5yz$

d) $-4x^3 + 5x^2 - 9x^2 + 12x^3 - \dfrac{3}{2}x + x - 1$

a) $10zy^3$ b) $\dfrac{1}{6}xyz$ c) $-3xy + 2xz + 5yz$ d) $8x^3 - 4x^2 - \dfrac{1}{2}x - 1$

4.47 Copia y completa esta suma de polinomios.

$$\begin{array}{rrrr} -4x^3 + & \mathbf{(-4x^2)} + & 6x & - \mathbf{4} \\ \mathbf{11x^3} + & 3x^2 & - 10x & + 19 \\ \hline 7x^3 - & x^2 & + \mathbf{(-4x)} & + 15 \end{array}$$

4.48 Con los siguientes polinomios.

$P(x) = -5x^4 + 7x^2 - 5x + 1 \qquad M(x) = -6x^3 + 9x^2 - x + 1 \qquad T(x) = x^4 + 2x^3 + 8x - 2$

Realiza las operaciones indicadas.

a) $P(x) - T(x) + 2M(x)$ **b)** $(M(x) - P(x)) \cdot (T(x) - M(x))$ **c)** $3P(x) - 4T(x) - M(x)$

a) $-5x^4 + 7x^2 - 5x + 1 - (x^4 + 2x^3 + 8x - 2) + 2(-6x^3 + 9x^2 - x + 1) =$
$= -5x^4 + 7x^2 - 5x + 1 - x^4 - 2x^3 - 8x + 2 - 12x^3 + 18x^2 - 2x + 2 = -6x^4 - 14x^3 + 25x^2 - 15x + 5$

b) $[(-6x^3 + 9x^2 - x + 1) - (-5x^4 + 7x^2 - 5x + 1)] \cdot [x^4 + 2x^3 + 8x - 2 - (-6x^3 + 9x^2 - x + 1)] =$
$= (5x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 4x) \cdot (x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 9x - 3) = 5x^8 + 34x^7 - 91x^6 + 119x^5 - 55x^4 + 30x^2 - 12x$

c) $3(-5x^4 + 7x^2 - 5x + 1) - 4(x^4 + 2x^3 + 8x - 2) - (-6x^3 + 9x^2 - x + 1) =$
$= -15x^4 + 21x^2 - 15x + 3 - 4x^4 - 8x^3 - 32x + 8 + 6x^3 - 9x^2 + x - 1 = -19x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 46x + 10$

4.49 Copia y completa esta multiplicación de polinomios.

$$\begin{array}{rrrr}
 & -\mathbf{4}x^2 & +\ \mathbf{3}x & -\ 1 \\
 & & -\ 5x & +\ \mathbf{2} \\
\hline
 & -\ \mathbf{8}x^2 & +\ 6x & -\ 2 \\
\mathbf{20}x^3 & -\ 15x^2 & +\ \mathbf{5}x & \\
\hline
\mathbf{20}x^3 & -\ 23x^2 & +\ \mathbf{11}x & -\ 2
\end{array}$$

4.50 Saca factor común en estas expresiones.

a) $-8x^2y^3 + 4x^3y - 2x^4y^2$

b) $9t^3x^4 - 5t^2x^6 + 2t^7x^5$

c) $8z^2t - \frac{2}{3}x^3t^2 - \frac{4}{7}z^4t^3$

d) $-\frac{2}{21}a^3b^2 - \frac{4}{15}a^4b^7 - \frac{14}{3}a^9b^4$

a) $-2yx^2(4y^2 - 2x + yx^2)$

b) $x^4t^2(9t - 5tx^2 + 2xt^5)$

c) $2t\left(4z^2 - \frac{1}{3}x^3t - \frac{2}{7}z^4t^2\right)$

d) $\frac{2}{3}a^3b^2\left(-\frac{1}{7} - \frac{2}{5}a^3b^5 - 7a^6b^2\right)$

4.51 Expresa estos polinomios en forma de productos.

a) $x^2 - 4xy + 4y^2$

b) $49 - 7z + \frac{z^2}{4}$

c) $36z^2t^2 + 24z^2t + 4z^2$

d) $3z^2 + 12zx + 12x^2$

a) $(x - 2y)^2$

b) $\left(7 - \frac{z}{2}\right)^2$

c) $(6zt + 2z)^2$

d) $(\sqrt{3}z + \sqrt{12}x)^2$

4.52 Desarrolla las siguientes potencias de polinomios.

a) $(3x - 4)^3$ **b)** $(x + 1)^4$ **c)** $(2x + 3y)^4$ **d)** $(x + y + z)^2$

a) $(3x - 4)^3 = (3x)^3 + (-4)^3 + 3(3x)^2(-4) + 3(-4)^2(3x) = 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$

b) $(x + 1)^4 = (x + 1)^2 \cdot (x + 1)^2 = (x^2 + 1 + 2x) \cdot (x^2 + 1 + 2x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

c) $(2x + 3y)^4 = (2x + 3y)^2 \cdot (2x + 3y)^2 = (4x^2 + 9y^2 + 12xy) \cdot (4x^2 + 9y^2 + 12xy) =$
$= 16x^4 + 81y^4 + 216x^2y^2 + 96x^3y + 216y^3x$

d) $(x + y + z)^2 = (x + y + z) \cdot (x + y + z) = x^2 + xy + xz + yx + y^2 + yz + zx + zy + z^2 =$
$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

4.53 Realiza las siguientes operaciones.

a) $-5x(x^2 + x + 1) + 4(2x^3 + 7x^2 - 2)$

b) $(3x - 2)^2 . (-2x + 1) - 3(6x^3 - 4x^2 + 3x - 2)$

c) $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right)$

d) $(-x + 2) \cdot (5x + 3) . (2x - 4) - 3x(x + 1)$

e) $4(-5x^2 + 6x - 1) - (2x^3 - 6) + 7x^2 - 8x$

f) $(-7x + 2) \cdot (4x - 5) - 2x(-3x^2 + 9)$

g) $-x^2 \cdot (x^3 - x^2 - 1) - x(x^2 - 1)$

h) $(x + 1)^3 - x^3 - 1 - 3(x^2 + 1)$

i) $-2x(-x^2) - 5x^2(2x^3) + (x^4 - 2x^2) \cdot (-7x + 2)$

j) $3(x - 1) - 4(7x^2 - 9x) + 7(-4x + 2)$

a) $3x^3 + 23x^2 - 5x - 8$

b) $-36x^3 + 45x^2 - 29x + 10$

c) $\frac{x^3}{3} - \frac{163}{60}x^2 + \frac{86}{15}x - \frac{4}{5}$

d) $-10x^3 + 31x^2 - 19x - 24$

e) $-2x^3 - 13x^2 + 16x + 2$

f) $6x^3 - 28x^2 + 25x - 10$

g) $-x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + x$

h) $3x - 3$

i) $-17x^5 + 2x^4 + 16x^3 - 4x^2$

j) $-28x^2 + 11x + 11$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

4.54 ¿Puede existir un trinomio, con una sola variable, de grado 1? Justifica la respuesta.

No. Todos los polinomios de grado 1 son de la forma $ax + b$, luego, como mucho, son binomios.

4.55 Los siguientes polinomios tienen sus términos ordenados en forma decreciente.

$(-3x^3 + \square) + (7x^3 + \square) = P(x)$

$(-6x^4 + \square) - (2x^2 + \square) = R(x)$

$(-x^5 + \square) \cdot (4x^3 + \square) = T(x)$

$(2x^3 + \square)^3 = L(x)$

$[(2x + \square) \cdot (-6x^4 + \square)]^2 = M(x)$

¿Cuál es el grado de los polinomios $P(x)$, $R(x)$, $T(x)$, $L(x)$ y $M(x)$?

Grado $P(x) = 3$ Grado $R(x) = 4$ Grado $T(x) = 8$ Grado $L(x) = 9$ Grado $M(x) = 10$

4.56 Indica si son correctas estas operaciones.

a) $3x^4 - 2x = x^3$

b) $(4x^2 + 3x)^2 = 16x^4 + 9x^2$

c) $(4x^3)^3 = 64x^9$

d) $\left(\frac{7}{2}x^2y\right) \cdot (6xy^3) = 21x^3y^4$

e) $(5x - 2y) \cdot (5x - 2y) = 25x^2 - 4y^2$

a) Incorrecta

b) Incorrecta

c) Correcta

d) Correcta

e) Incorrecta

4.57 **¿Puede tener un polinomio un mismo valor numérico para dos valores distintos de la variable? Justifica tu respuesta.**

Sí, por ejemplo, lo vemos en el caso del polinomio x^2, cuyo valor, tanto para $x = 1$ como para $x = -1$, es 1.

4.58 **¿Puede tener un polinomio varios valores numéricos para un determinado valor de la variable? Justifica la respuesta.**

No, las operaciones que incluye un polinomio dan como resultado sólo un valor.

4.59 **Sin realizar operaciones, ¿para qué valor de x el polinomio $5x^3 - 4x^2 + 8x - 7$ toma el valor -7?**

Para $x = 0$

4.60 **Indica qué valores de la incógnita hacen que el polinomio $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 7) \cdot (2x - 3)$ tenga como valor numérico 0.**

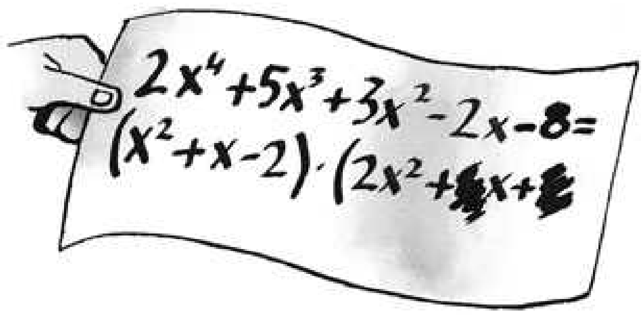
Para $x = 1$, $x = -7$ y $x = \frac{3}{2}$

4.61 **Halla el polinomio de grado 2 cuyo término principal es 16, cuyo término independiente es 1 y que es un cuadrado perfecto. ¿Cuántas soluciones existen?**

$$ax^2 + bx + c \text{ donde } \left.\begin{matrix} a = 16 \\ c = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 16x^2 + bx + 1 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow 16x^2 + 8x + 1 = (4x + 1)^2$$

PROBLEMAS PARA APLICAR

4.62 **Mario le pasa a Pablo una multiplicación de polinomios para que compruebe el resultado, pero no se pueden leer todos los coeficientes.**



¿Cuáles son los coeficientes que faltan?

$$2x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 2x - 8 = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x^3 + ax^2 + bx - 4x^2 - 2ax - 2b =$$

$$= 2x^4 + (a + 2)x^3 + (b + a - 4)x^2 + (b - 2a)x - 2b \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} a + 2 = 5 \\ b + a - 4 = 3 \\ b - 2a = -2 \\ -2b = -8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 3,\ b = 4$$

4.63 **Halla el polinomio que aparece en las siguientes igualdades.**

a) $\dfrac{Q(x)}{\frac{1}{2}x^2 - 4x + 3} = -x + \dfrac{1}{3}$ **b)** $(L(x))^2 = 4x^2 - 12x + 9$

a) $Q(x) = \left(-x + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 3\right) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{25}{6}x^2 - \frac{13}{3}x + 1$

b) $(L(x))^2 = 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2 \Rightarrow L(x) = 2x - 3$ ó $L(x) = 2x + 3$

4.64 **La edad de un hombre y la de su hijo se diferencian en 30 años. Dentro de cinco años, la edad del padre será el triple que la de su hijo.**

Copia y completa, utilizando una variable, la tabla con la edad del padre y del hijo.

	Padre	**Hijo**
Edad actual		
Edad dentro de cinco años		

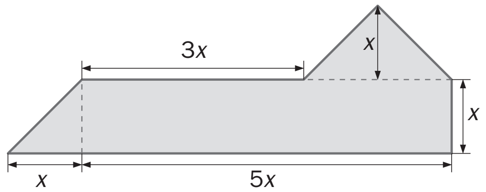
$x \equiv$ edad hijo

$30 + x \equiv$ edad padre $\Rightarrow 30 + x + 5 = 3(x + 5) \Rightarrow x + 35 = 3(x + 5) \Rightarrow x + 35 = 3x + 15 \Rightarrow 20 = 2x \Rightarrow x = 10$

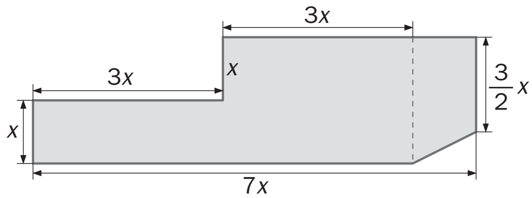
	Padre	Hijo
Edad actual	40	10
Edad dentro de cinco años	45	15

4.65 **Expresa mediante un polinomio el área de las figuras.**

a)



b)



Dividimos las figuras en otras más simples y sumamos las áreas:

a) $\dfrac{x \cdot x}{2} + 5x \cdot x + \dfrac{2x \cdot x}{2} = \dfrac{13}{2}x^2$

b) $3x \cdot x + 3x \cdot 2x + x \cdot \dfrac{3}{2}x + \dfrac{x \cdot \frac{1}{2}x}{2} = 3x^2 + 6x^2 + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}x^2 = \dfrac{43}{4}x^2$

4.66 **Averigua los valores de *x* e *y*, para que se produzca la siguiente transformación.**

$x + y$	$y^2x - 1$	$\dfrac{y}{6x} + 7$
$3y - 4x$	$(x + 1)^3y$	xy

⇩

7	**35**	**8**
14	**48**	**6**

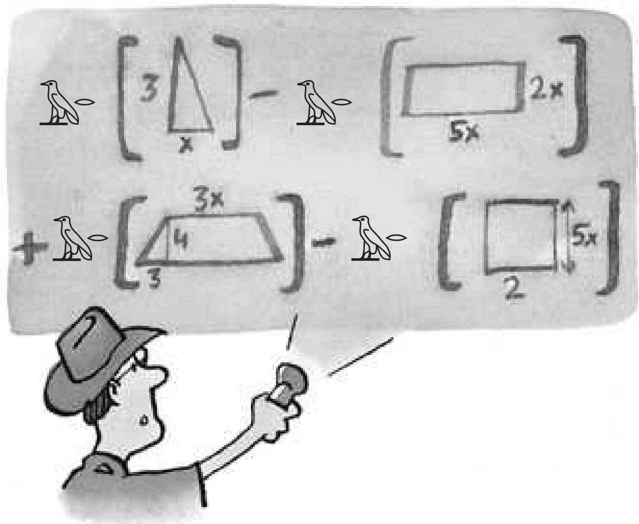
Los valores son: $x = 1$, $y = 6$.

4.67 **Expresa con un monomio el área de un triángulo equilátero de lado *x*.**

Aplicando el teorema de Pitágoras: $x^2 = h^2 + \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{x^2 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

Área $= \dfrac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$

4.68 En una pirámide del antiguo Egipto descubrieron la siguiente inscripción.



Un joven matemático desveló el enigma y, para su sorpresa, descubrió que significaba área y se trataba de un polinomio. ¿Cuál era?

Calculamos las diferentes áreas:

$$\frac{3x}{2} - 5x \cdot 2x + \left(2\left(\frac{4 \cdot 3}{2}\right) + 3x \cdot 4\right) - 2 \cdot 5x = \frac{3x}{2} - 10x^2 + 12 + 12x - 10x = 10x^2 + \frac{7}{2}x + 12$$

4.69 Sin conocer todavía la división de polinomios, pero sabiendo que cumplen la misma regla de dividir que los números, halla el polinomio dividendo de la división.

$$\begin{array}{l|l} \boldsymbol{P(x)} & \boldsymbol{x^2 - 3} \\ \cline{2-2} \ldots & \boldsymbol{x^2 - 1} \\ \boldsymbol{3x - 2} & \end{array}$$

$P(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 1) + (3x - 2) = x^4 - 4x^2 + 3x + 1$

REFUERZO

Expresiones algebraicas

4.70 Escribe en lenguaje algebraico.

a) Dos números cuyo producto es 18.

b) Tres cubos consecutivos.

c) Un múltiplo de 5 más su doble.

d) El producto de dos pares consecutivos.

a) $x \cdot y = 18$

b) $x^3, (x + 1)^3, (x + 2)^3$

c) $5x + 10x$

d) $2x \cdot (2x + 2)$

Monomios y polinomios

4.71 Indica cuáles de estos monomios son semejantes a $3x^2zy^3$.

a) $8x^2yz^3$

b) $\dfrac{x^2yz^3}{17}$

c) x^2zy^3

d) $15xzy^3$

El c, porque tiene la misma parte literal.

4.72 Comprueba que estos pares de polinomios son no son equivalentes, hallando sus valores numéricos para $x = 1$.

a) $(x + 2)^3$ **y** $x^3 + 8$

b) $-\dfrac{8x^2 - 4}{2}$ **y** $4x^2 - 2$

c) $(3x^2)^3$ **y** $-27x^5$

a) $(1 + 2)^3 = 3^3 = 27$ y $1^3 + 8 = 1 + 8 = 9 \Rightarrow$ No son equivalentes.

b) $-\dfrac{8 \cdot 1^2 - 4}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2$ y $4 \cdot 1^2 - 2 = 2 \Rightarrow$ No son equivalentes.

c) $(3 \cdot 1^2)^3 = 3^3 = 27$ y $-27 \cdot 1^5 = -27 \Rightarrow$ No son equivalentes.

Operaciones con polinomios

4.73 Efectúa estos productos.

a) $-3x^2 \cdot (4x^3 - 5x + 2)$ **b)** $5x^2yz^4 \cdot (4x^3 - 5x + 2)$ **c)** $(6y^2 - 5y + 1) \cdot (4y^2 - 3)$

a) $-12x^5 + 15x^3 - 6x^2$

b) $20x^5yz^4 - 25x^3yz^4 + 10x^2yz^4$

c) $24y^4 - 18y^3 - 20y^2 + 15y + 4y^2 - 3 = 24y^4 - 34y^2 + 15y - 3$

4.74 Realiza las operaciones indicadas con los siguientes polinomios.

$P(x) = 5x^2 - 4x + 1$ $Q(x) = -6x + 2$ $L(x) = x^2 - 5$ $M(x) = x^3 - 5x + 4$

a) $P(x) + Q(x)$ **b)** $Q(x) - M(x)$ **c)** $L(x) \cdot M(x)$ **d)** $(M(x))^2$

a) $5x^2 - 10x + 3$

b) $-x^3 - x - 2$

c) $x^5 - 10x^3 + 4x^2 + 25x - 20$

d) $x^6 - 10x^4 + 8x^3 + 25x^2 - 40x + 16$

4.75 Utilizando los productos notables, desarrolla estas potencias de binomios.

a) $(x - 3)^2$ **b)** $(2a + 3b)^2$ **c)** $(x^2 + 2)^2$ **d)** $(3 - 2t^3)^2$

a) $x^2 - 6x + 9$ b) $2a^2 + 12ab + 9b^2$ c) $x^4 + 4x^2 + 4$ d) $9 - 12t^3 + 4t^6$

4.76 Completa estas igualdades.

a) $(\square - 2z)^2 = 25x^2 - \square + 4z^2$ **b)** $(3z^2 + \square)^2 = \square + \square + 1$

a) $(\mathbf{5x} - 2z)^2 = 25x^2 - \mathbf{20xz} + 4z^2$

b) $(3z^2 + \mathbf{1})^2 = \mathbf{9z^4} + \mathbf{6z^2} + 1$

AMPLIACIÓN

4.77 Una igualdad notable muy útil en el cálculo de polinomios es la siguiente:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$$

Teniendo en cuenta este resultado, desarrolla las siguientes potencias.

a) $(2x^2 + 1)^3$ **b)** $(3x + y)^3$

a) $(2x^2 + 1)^3 = 8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1$

b) $(3x + y)^3 = 27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$

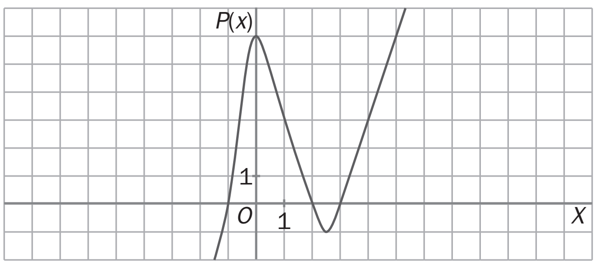
4.78 Encuentra un polinomio $N(x)$, de grado 2, de forma que $N(0) = 3$, $N(-1) = 12$ y $N(2) = 15$.

$$N(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} N(0) = c = 3 \\ N(-1) = a - b + c = 12 \\ N(2) = 4a + 2b + c = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 9 \\ 4a + 2b = 12 \end{cases} \Rightarrow 4(9 + b) + 2b = 12 \Rightarrow 36 + 4b + 2b = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6b = -24 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow a = 5$$

Así: $N(x) = 5x^2 - 4x + 3$

4.79 Hemos representado en una gráfica los valores numéricos de un polinomio, $P(x)$, según el valor de la variable por la que sustituimos x.



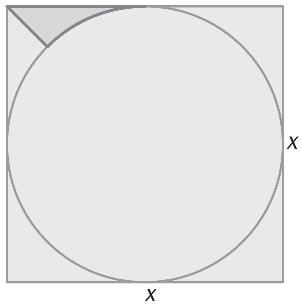
a) Para qué valores de x el valor numérico del polinomio es 0?

b) ¿Qué valores toma el polinomio cuando la variable x es 1?

a) Para $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$

b) $P(1) = 3$

4.80 **Expresa el área coloreada en azul en forma de un solo monomio.**



El área del cuadrado es x^2.

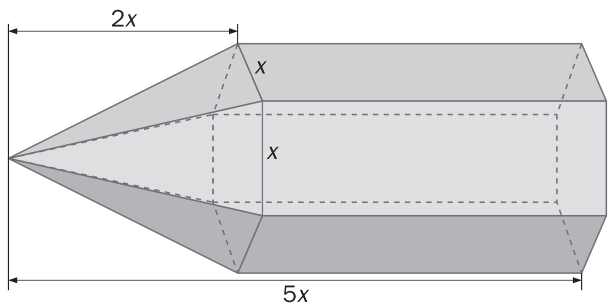
La del círculo es $\pi \cdot \frac{x^2}{4}$.

La suma de las áreas de los huecos entre el cuadrado y el círculo es: $x^2 - \frac{\pi}{4}x^2 = \frac{4 - \pi}{4}x^2$

Si dividimos entre 4 tendremos la de un hueco, y entonces dividimos entre dos y tendremos el área de la mitad de uno de esos huecos:

$$\frac{\frac{\left(\frac{4-\pi}{4}\right)}{4}}{2}x^2 = \frac{4-\pi}{32}x^2$$

4.81 **Escribe la fórmula que permite calcular el volumen del siguiente cuerpo geométrico.**



Sumamos los volúmenes del prisma y de la pirámide y obtenemos el volumen del conjunto.

La base del prisma es un hexágono regular de lado x.

Calculamos la apotema de la base utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$\text{Apotema} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Calculamos el volumen del prisma:

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \cdot 3x = \frac{9\sqrt{3}}{2}x^3$$

Calculamos el volumen de la pirámide:

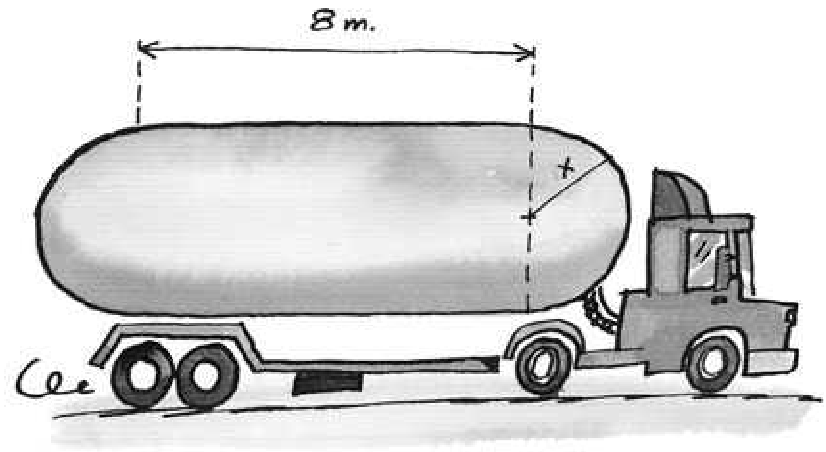
$$V_{\text{pirámide}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \cdot 2x}{3} = \sqrt{3}x^3$$

Así, el volumen de la pirámide es:

$$V_T = \frac{9\sqrt{3}}{2}x^3 + \sqrt{3}x^3 = \frac{11\sqrt{3}}{2}x^3$$

4.82 Depósito lácteo

El depósito de un camión destinado a transportar leche tiene la forma de la figura.



a) Determina, mediante dos expresiones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, la superficie y el volumen del depósito.
b) Calcula la superficie y el volumen si $x = 2$ y $x = 3$ metros.

a) Superficie total = Superficie lateral cilindro + Superficie esfera = $16\pi x + 4\pi x^2$

Volumen total = Volumen cilindro + volumen esfera = $8\pi x^2 + \frac{4}{3}\pi x^3$

b) $A(2) = 16\pi x + 4\pi x^2 = 150{,}8$ m²; $A(3) = 16\pi x + 4\pi x^2 = 263{,}89$ m²

$V(2) = 8\pi x^2 + \frac{4}{3}\pi x^3 = 134{,}04$ m³; $V(3) = 8\pi x^2 + \frac{4}{3}\pi x^3 = 339{,}29$ m³

4.83 Ayudas para material

El Ayuntamiento de Jarrilla ofrece a sus habitantes una ayuda para la compra de material escolar ante el inicio de curso.

La ayuda se calcula utilizando la fórmula: $A = 25n + 50i$

Siendo:

A: la ayuda en euros.

n: el número de hijos que integran la familia y que están escolarizados en Educación Primaria o en ESO.

i: un coeficiente relacionado con los ingresos anuales del total de integrantes de la familia y que se calcula mediante la siguiente tabla.

Ingresos anuales	*i*
Menos de 12 000 euros	4
Entre 12 000 y 15 000 euros	3
Entre 15 000 y 20 000 euros	2
Más de 20 000 euros	1

Calcula la ayuda que corresponde a cada una de las siguientes familias:

Familia	Hijos escolarizados	Ingresos anuales
González	3	19 000
Sánchez	2	11 500
Pérez	1	14 000
García	2	25 000

González: $A = 25n + 50i = 25 \cdot 3 + 50 \cdot 2 = 175$ €
Sánchez: $A = 25n + 50i = 25 \cdot 2 + 50 \cdot 4 = 250$ €
Pérez: $A = 25n + 50i = 25 \cdot 1 + 50 \cdot 3 = 175$ €
García: $A = 25n + 50i = 25 \cdot 2 + 50 \cdot 1 = 100$ €

4.A1 **Indica cuál de estas expresiones algebraicas es un monomio.**

$\dfrac{5}{z^2}$ $\sqrt{7xy}$ $5t^{\frac{1}{2}}$ $15z^3m^4$ $-3x^2 + 1$

El único monomio es $15z^3m^4$.

4.A2 **Con los siguientes polinomios.**

$A(x) = 3x - 2$ $B(x) = -5x^2 - 6x + 1$ $C(x) = 4x + 3$

Realiza las operaciones indicadas.

a) $A(x) - B(x)$ **b)** $(A(x))^2$ **c)** $A(x) \cdot C(x)$

a) $(3x - 2) - (-5x^2 - 6x + 1) = 5x^2 + 9x - 3$

b $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

c) $(3x - 2) \cdot (4x + 3) = 12x^2 + x - 6$

4.A3 **¿Cuál es el grado de este polinomio?**

$15xy^4 - 3x^2y^6 + 7x^7 - 2x^5y + y^6$

El polinomio tiene grado 8.

4.A4 **Halla los valores de *a*, *b* y *c*, para que los polinomios *A*(*x*) y *B*(*x*) sean iguales.**

$A(x) = (7a - 4)x^3 - 6x + (1 - 5b)$

$B(x) = 3x^3 + 8cx^2 + (b - 4)x + 11$

Para que sean iguales, los coeficientes de cada uno de sus términos han de ser iguales. Así:

$$\begin{cases} 7a - 4 = 3 \\ 0 = 8c \\ -6 = b - 4 \\ 1 - 5b = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a = 7 \\ c = 0 \\ -2 = b \\ -5b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

Luego $a = 1$, $b = -2$ y $c = 0$

4.A5 **Relaciona cada área sombreada con el monomio que le corresponde.**

a) $\dfrac{x^2}{8}$ **b)** $\dfrac{3}{2}x^2$ **c)** $3x^2$

a) Cuadrado b) Triángulo c) Rectángulo

4.A6 **Aplica las igualdades notables para desarrollar las siguientes operaciones.**

a) $(2a + b)^2$

b) $(2x^2 - y)^2$

c) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$

d) $(3t^3 - 2)^2$

a) $4a^2 + b^2 + 4ab$

b) $4x^4 + y^2 - 4x^2y$

c) $9x^2 - 1$

d) $9t^6 + 4 - 12t^3$

4.A7 **Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = 2 - x^2 + 3x - 2x^3$ para el valor $x = -2$.**

$P(-2) = 2 - (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)^3 = 8$